

Étude du carnet d'ordres



Christian Gouriéroux
Directeur du Laboratoire
de finance-assurance
CREST



Gaëlle Le Fol
Enseignant-chercheur
CREST
et Université Paris I



Bertrand Meyer
Ingénieur de projet
BNP

Les marchés financiers dirigés par les ordres ont la particularité de fonctionner sans qu'aucun intermédiaire ou animateur n'assure la liquidité. C'est le carnet d'ordres contenant l'ensemble des ordres en attente, qui joue ce rôle. A chaque instant, un investisseur souhaitant intervenir sur le marché peut choisir d'être servi instantanément en soumettant un ordre au mieux ⁽¹⁾ par exemple, ou de différer son exécution pour éventuellement obtenir un meilleur prix, en soumettant un ordre à prix limite ⁽²⁾. Dans le premier cas, l'ordre est exécuté immédiatement contre la ou les contreparties en attente sur le carnet d'ordres, donnant lieu à une ou plusieurs transactions. Si l'ordre n'est pas exécutable lors de son entrée dans le système, il est rangé dans le carnet côté achat ou vente selon son type, par limite de prix et par date d'enregistrement. Ainsi à chaque date, le carnet d'ordres est constitué d'un ensemble d'ordres d'achat en attente et d'un ensemble d'ordres de vente en attente qui peuvent être représentés par des fonctions de demande et d'offre, qui donnent le nombre de titres offerts ou demandés en fonction du prix. En effet, tout ordre de vente en attente sur une limite de prix donnée sera exécutable à tout prix supérieur ou égal à cette limite. De même, tout ordre d'achat en attente sur une limite de prix donnée sera exécutable à tout prix inférieur ou égal à cette limite.

Les carnets d'ordres permettent de reconstituer à toutes dates des fonctions d'offre et de demande, qui sont ensuite confrontées par le système pour définir les appariements possibles et en particulier les prix des

échanges. Le but de l'article est d'analyser la dynamique de ces fonctions d'offre et de demande et ses liens avec celle des prix de transaction.

En nous appuyant sur l'exemple du système Cac (Cotation Assistée en Continu) de la Bourse de Paris, nous décrivons dans le paragraphe I comment sont reçus et traités les ordres à prix limites. A l'exception d'ajustements dus à l'aspect discret des prix possibles (et des volumes) les systèmes d'appariement sont construits pour être le plus près possible de l'équilibre. Les ordres d'achat et de vente à prix limites non satisfaits peuvent alors être assimilés à des portions des fonctions d'offre et de demande. Nous terminons le paragraphe en définissant les fonctions *bid* et *ask*, fonctions inverses des offres et demandes non satisfaites et donnons des exemples d'évolutions de telles courbes.

Les carnets d'ordres fournissent une information en temps réel très utile pour prévoir les prix et la liquidité futures, et décider des stratégies financières. Ainsi les courbes *bid* et *ask* permettent de lire directement le prix unitaire que l'on peut obtenir pour un échange immédiat d'un volume donné. Par exemple, un investisseur souhaitant échanger un volume v donné peut comparer les prix proposés sur le marché de blocs à ceux qu'il peut obtenir en écoulant son volume v directement sur le système Cac.

Par ailleurs les courbes permettent de mieux appréhender la notion de liquidité. De façon classique, un titre est considéré liquide lorsque la fourchette *bid-ask* associée est faible et la profondeur sur les meilleures limites est importante. Grâce à l'étude du carnet d'ordres, on peut ajouter d'autres mesures de liquidité, liées par exemple aux pentes du carnet d'ordres. En effet, plus les pentes du carnet d'ordres sont faibles, moins l'échange d'un volume important aura d'impact sur les prix.

Communication présentée à la 14^e conférence internationale de finance organisée en juin 1997 à Grenoble.
Cet article a bénéficié des remarques des membres du comité de lecture de la revue que l'auteur remercie vivement.
Les erreurs éventuelles qui subsisteraient n'engagent que les auteurs.

Les paragraphes II et III s'intéressent à la dynamique intra-journalière du carnet d'ordres résiduels. Nous y mettons en évidence une représentation dynamique doublement factorielle du carnet d'ordres, à la fois dans la direction du temps et dans celle du volume.

I La gestion du marché

1. Carnet d'ordres

Sur les marchés financiers, les prix sont fixés en multiples d'une unité de base que par convention nous prenons égale à un. Nous introduisons aussi un niveau maximal de prix N , de sorte que les valeurs possibles des prix sont $\{1, \dots, n, \dots, N\}$.

Avant que ne s'effectue la confrontation de l'offre et de la demande, on construit un carnet d'ordres cumulés (appendice 1).

Celui-ci comporte la description des souhaits des investisseurs intéressés par des échanges sous forme d'ordre d'achat ou de vente à prix limites. Passer un ordre d'achat pour une quantité $x(n)$ au prix limite n signifie que l'on accepte tout échange proposé pour une quantité inférieure ou égale à $x(n)$ et un prix inférieur ou égal à n . De façon symétrique, passer un ordre de vente pour une quantité $x(n)$ au prix limite n signifie que l'on accepte tout échange proposé pour une quantité inférieure ou égale à $x(n)$ et un prix supérieur ou égal à n .

Dans la suite nous désignons par : $d(n)$ (resp. $s(n)$), la quantité globale demandée (offerte) au prix limite n . Ces diverses quantités peuvent être cumulées pour construire des fonctions d'offre et de demande globales :

$$D(n) = \sum_{i=1}^n d(i), \quad S(n) = \sum_{i=1}^n s(i)$$

$D(n)$ donne l'ensemble des quantités demandées par les acheteurs intéressés dans un prix proposé égal à n , c'est-à-dire par ceux dont le prix limite est supérieur à n . De même $S(n)$ donne l'ensemble des quantités offertes par les vendeurs intéressés dans un prix proposé égal à n , c'est-à-dire par ceux dont le prix limite est inférieur à n . Les fonctions d'offre et de demande sont à valeurs discrètes et respectivement croissante et décroissante. Leur forme est donnée dans la figure 1.

2. Fixation du prix

Etant données les fonctions d'offre et de demande, on peut fixer un prix de marché, s'appliquant alors à tous les échanges. Que ce soit des procédures d'appariement au fixing ou en continu, il est générale-

ment déterminé de façon à maximiser la quantité échangée.

Introduisons les niveaux de prix : $b = \sup_n \{D(n) > S(n)\}$, $a = \inf_n \{S(n) > D(n)\}$. La valeur de b (respectivement a) est appelée prix *bid* (respectivement prix *ask*). Nous supposons, pour simplifier la présentation, qu'il n'existe pas de valeur du prix, pour laquelle il y a égalité stricte de l'offre et de la demande, et que de plus $S(b) \neq D(b+1)$. Le prix *bid* est alors caractérisé par les conditions :

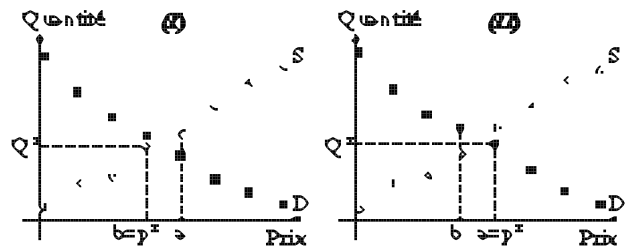
$$D(b) > S(b), \quad D(b+1) < S(b+1), \quad [1]$$

et nous avons : $a = b+1$.

Le prix de marché, assurant l'échange maximal est donné par :

$$p^* = \begin{cases} b, & \text{si } S(b) > D(b+1) \\ a = b+1, & \text{si } S(b) < D(b+1) \end{cases} \quad [2]$$

Figure 1 (I) Cas où $p^* = b$, (II) cas où $p^* = a$



La quantité échangée est égale à :

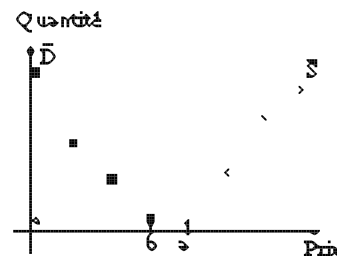
$$Q^* = \begin{cases} S(b), & \text{si } p^* = b, \\ D(b+1) = D(a), & \text{si } p^* = b+1 = a \end{cases} \quad [3]$$

Le modèle précédent ne conduit pas à l'existence d'un équilibre, même si on en est très proche. Ceci résulte de l'aspect discret des prix. Au prix de marché, il existe toujours des intervenants potentiels insatisfaits. Leur importance est :

$$\begin{cases} D(b) - S(b), & \text{si } p^* = b, \\ S(b+1) - D(b+1) & \text{si } p^* = b+1 \end{cases}$$

Il existe également après l'échange des ordres non traités définissant alors des queues à la fois des cotés offre et demande. Ils permettent de définir un carnet d'ordres résiduels correspondant aux demandes et offres non traitées (figure 2).

Figure 2 Courbes de demande et offre non satisfaites



Elles sont mathématiquement données par :

$$\tilde{D}(n) = [D(n) - Q^*]^+ = \text{Max}(D(n) - Q^*, 0) \quad [4]$$

$$\tilde{S}(n) = [S(n) - Q^*]^+ = \text{Max}(S(n) - Q^*, 0) \quad [5]$$

et s'obtiennent par translation de Q^* à partir des portions supérieures des fonctions d'offre et de demande.

3. Fonctions bid et ask

Nous avons expliqué que les carnets d'ordres résiduels correspondent à des portions \tilde{D} , \tilde{S} des fonctions d'offre et de demande sous-jacentes. On peut chercher à « inverser » ces courbes. C'est l'idée des fonctions *bid* et *ask*.

Définition. La fonction *ask* (resp. *bid*) donne le prix unitaire que doit payer un nouvel acheteur (resp. vendeur), qui souhaite échanger instantanément un volume donné ϑ .

En pratique, il doit pour cela passer un ordre au mieux d'un volume ϑ (ou un ordre à prix limite très défavorable). Généralement ce volume sera satisfait en utilisant plusieurs ordres, figurant en contrepartie sur le carnet et correspondant à des prix limites différents. Le prix unitaire est alors obtenu en pondérant ces divers prix limites (appendice 1). Les fonctions *bid* et *ask* sont respectivement décroissante et croissante, la seconde étant toujours située sous la première. Elles sont données par :

$$a(\vartheta) = \frac{\sum_{n=0}^{N(\vartheta)-1} (a+n) s(a+n) + [a + N(\vartheta)] \left[\vartheta - \sum_{n=0}^{N(\vartheta)-1} s(a+n) \right]}{\vartheta} \quad [6]$$

$$b(\vartheta) = \frac{\sum_{n=0}^{N'(\vartheta)-1} (b-n) d(b-n) + [b - N'(\vartheta)] \left[\vartheta - \sum_{n=0}^{N'(\vartheta)-1} d(b-n) \right]}{\vartheta} \quad [7]$$

où $a + N(\vartheta)$ et $b - N'(\vartheta)$ sont les prix extrêmes des ordres proposés en contrepartie :

$$N(\vartheta) = \inf_n \left\{ \sum_{k=0}^K s(a+k) > \vartheta \right\}$$

et $N'(\vartheta) = \inf_n \left\{ \sum_{k=0}^K d(b-k) > \vartheta \right\}$

A titre d'illustration, nous donnons dans les figures 3 et 4, les formes des courbes *bid* et *ask* pour le

titre Alcatel, le mardi 14 mai 1996 et à plusieurs moments de la journée.

Le premier intérêt de ces courbes est de fournir en temps réel des prix d'achat et de vente. Ainsi, le mardi 14 mai 1996 à 10 h 01, on lit directement sur la figure 3 qu'un investisseur souhaitant acheter immédiatement un volume de 5 000 titres peut obtenir un prix unitaire de 491.80 FF (3).

Ces courbes peuvent alors être utilisées pour comparer divers modes de transactions. Ainsi, sur le marché français des actions, les investisseurs souhaitant échanger un volume important (15 000 titres pour Alcatel) peuvent passer par le marché de blocs (4) ou par le système Cac. Les courbes proposées dans les figures 3 et 4 ont été calculées pour des volumes allant de 1 à 5 000 titres, mais peuvent être prolongées à des volumes supérieurs. Un investisseur souhaitant acheter ou vendre un volume important peut ainsi comparer les prix des teneurs de marché de blocs à ceux du marché électronique. Surtout l'analyse des formes de ces courbes donne une vision synthétique du marché et de son évolution à court terme.

Bien que les courbes évoluent sensiblement durant la journée, elles présentent quelques caractéristiques stables. Ainsi l'écart entre les courbes pour les petits volumes (fourchette) apparaît peu représentatif des écarts pour les volumes plus importants : il y a un effet de seuil dans le volume, ce seuil variant au cours de la journée. Ceci remet évidemment en cause les mesures classiques de liquidité fondées sur cette fourchette à volume faible. Par ailleurs, les courbes ne sont pas symétriques l'une par rapport à l'autre, une fois ce seuil franchi. La pente d'une courbe *bid* ou *ask* s'interprétant comme un effet marginal sur le prix d'une offre ou demande donnée, plus l'écart de pente entre les courbes est important, plus la volatilité des prix sera forte, et l'asymétrie des pentes implique un effet différent à la hausse et à la baisse [ce qui correspond à l'idée des modèles ARCH à seuil par exemple]. Il y a ainsi une relation étroite entre les évolutions des carnets d'ordre et de la volatilité du prix qui peut être constatée sur la figure 5 donnant l'évolution intra-journalière de la volatilité du cours Alcatel sur la période du 3 au 19 janvier 1995.

Ce lien entre fourchette de prix et volatilité est expliqué de la manière suivante dans certains modèles de microstructure. Plus il y a d'incertitude sur la valeur fondamentale, plus grand est le risque pour un offreur de liquidité d'échanger contre un investisseur informé, donc d'échanger dans des conditions défavorables. Pour se protéger d'un tel risque, les offreurs de liquidité proposent des prix moins favorables et la fourchette de prix s'écarte. Boyer-Le Fol (1997) montrent qu'un raisonnement similaire s'applique aux pentes du carnet d'ordres. Par ailleurs, plus la fourchette et plus les pentes sont importantes, plus les prix de transactions sont volatiles. En effet, ces prix de transactions résultent d'une séquence d'ordres d'achat et de vente et coïncident avec des prix respectivement *bid* ou *ask* ;

Figure 3 Courbes bid et ask vers 10 h 00, 11 h 00, 12 h 00 et 13 h 00, Alcatel

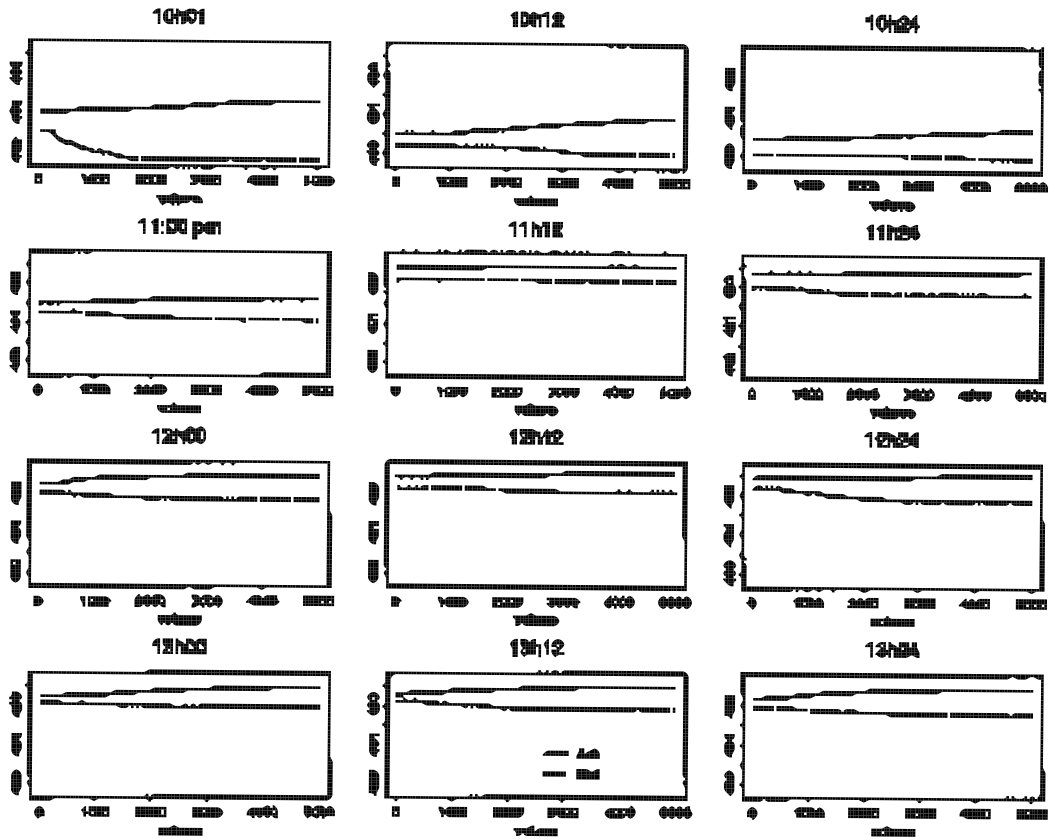
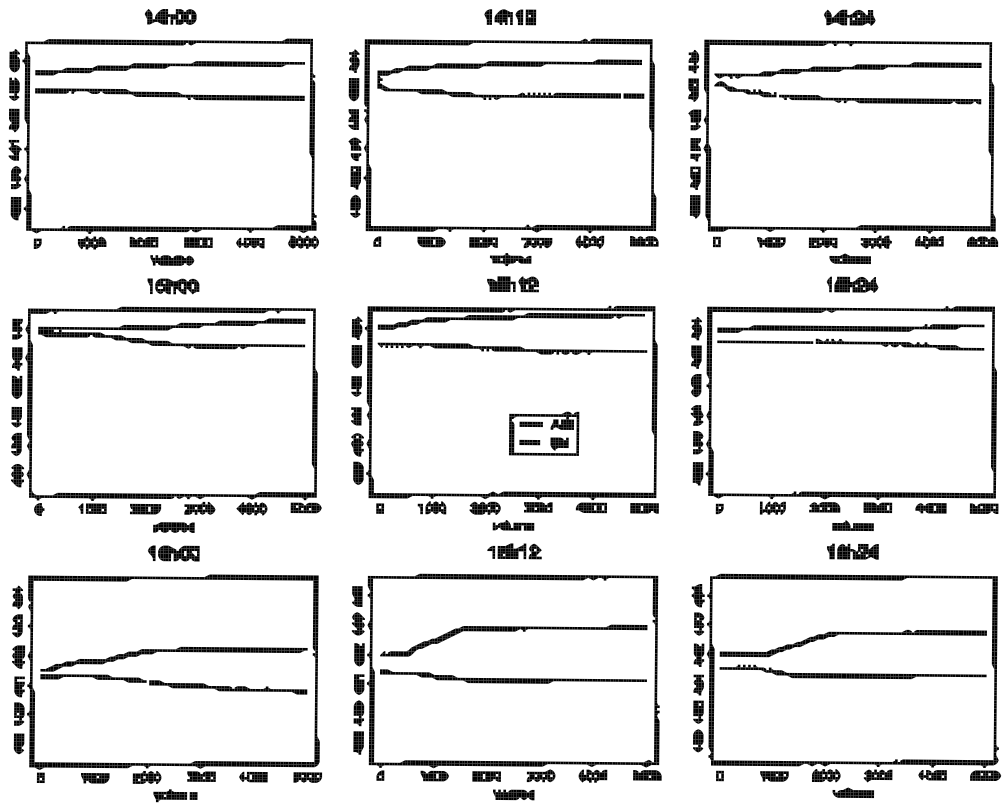
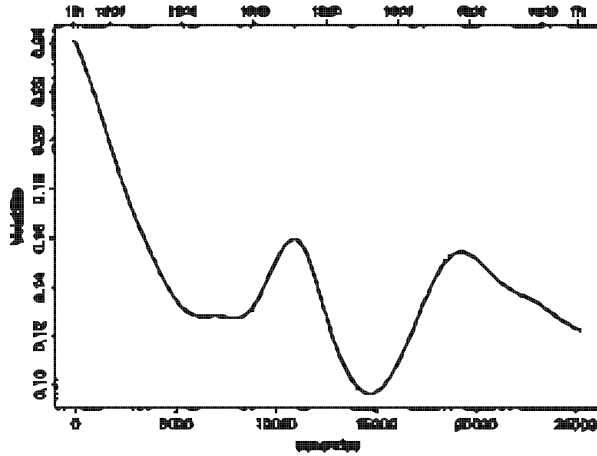


Figure 4 Courbes bid et ask vers 14 h 00, 15 h 00 et 16 h 00, Alcatel



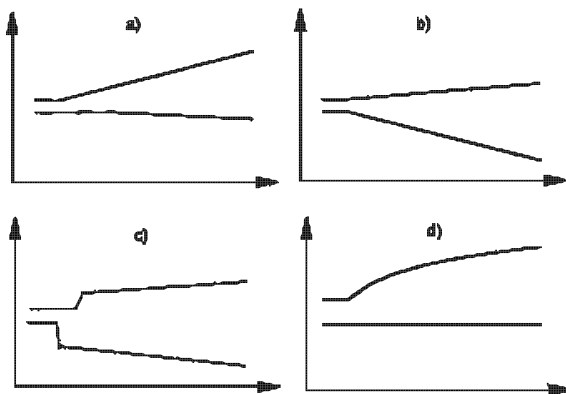
c'est le phénomène de danse de la fourchette. De plus, lorsque les pentes sont importantes, ces prix sont sensibles à l'importance des ordres ; un ordre au mieux de volume important peut donner lieu à plusieurs transactions simultanées à des prix différents dont la variabilité dépend essentiellement des pentes des courbes *bid* et *ask*.

Figure 5 Volatilité intra-journalière, Alcatel



Enfin, ces courbes peuvent servir à construire des mesures de liquidité. Une valeur est dite liquide s'il est possible d'en échanger un volume «important», «rapidement» sans que l'impact sur les prix ne soit «trop important». Si cette définition fait l'unanimité, sa traduction pratique est délicate ; on considère qu'un titre est liquide s'il est possible de l'échanger rapidement, mais aussi si l'écart entre les prix *bid* et *ask* (à volume $\vartheta=0$) est faible, et si la quantité disponible sur chacune des premières limites, appelée profondeur, est importante. Dans la figure 6 nous donnons quatre exemples de carnet d'ordres afin de mettre en évidence l'aspect multiple de la liquidité.

Figure 6 Exemple de carnet d'ordres



Si l'on retient les critères de fourchette et profondeur, le carnet d'ordres c) est préférable puisque la fourchette est la même en a), b) et c), mais la profon-

deur à l'achat y est plus importante. Cependant, l'impact sur les prix d'un achat de volume important est moins important dans le schéma b), alors que pour les ventes de volume important le schéma d) est le plus avantageux.

II Analyse descriptive des courbes *bid* et *ask*

Nous nous proposons dans ce paragraphe de mener une analyse descriptive des carnets d'ordres et de leur évolution intra-journalière correspondant à des dates de transactions. Les données proviennent de la base Topval et portent sur le titre Alcatel, le 14 mai 1996, soit 757 observations intra-journalières correspondant à des dates de transactions. L'incrément de prix, ou échelon de cotation, est de 10 centimes pour ce titre.

1. Les données

Nous pouvons représenter les données du carnet par la succession des courbes *bid* et *ask*, ou de certains résumés de ces courbes comme une fonction fourchette définie par : $sp(\vartheta) = a(\vartheta) - b(\vartheta)$. Sa représentation est donnée dans les figures 7 et 8.

L'analyse dynamique du carnet d'ordre consiste en une étude jointe des courbes $a_t(\cdot)$, $b_t(\cdot)$ qui donnent la structure par volume des prix d'offre et de demande ; un parallèle peut être établi entre l'étude de telles courbes et celle de la structure par terme des taux d'intérêt, qui est aussi une fonction de deux arguments, le temps et la maturité. A la différence des courbes *bid* et *ask*, les structures par terme de taux ne sont généralement pas monotones.

Par analogie avec les nappes de taux, on peut aussi représenter les données du carnet par des surfaces donnant les prix *bid* et *ask* en fonction du temps et du volume (figure 9).

Ces surfaces peuvent être lissées pour mieux appréhender l'évolution de ces courbes au cours de la journée. Ces lissages peuvent concerner les volumes, ou à la fois les volumes et les prix. Ils peuvent être effectués par moyennes glissantes, par splines, par polynômes locaux, etc. Ainsi nous pouvons choisir a priori, certains niveaux de volumes $\vartheta_1 = 0, \vartheta_2, \dots, \vartheta_n$, et des dates t_1, \dots, t_m , puis lisser les prix *ask* par la formule :

$$a_t^*(\vartheta) = \frac{\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{n_j} K\left(\frac{t-t_j}{h_1}\right) K\left(\frac{\vartheta-\vartheta_i}{h_2}\right) a_{t_j}(\vartheta_i)}{\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{n_j} K\left(\frac{t-t_j}{h_1}\right) K\left(\frac{\vartheta-\vartheta_i}{h_2}\right)} \quad [8]$$

où K est un noyau et h_1 , h_2 respectivement les largeurs de fenêtres pour le temps et le volume. La figure 10

Figure 7 Fourchette vers 10 h 00, 11 h 00, 12 h 00 et 13 h 00, Alcatel

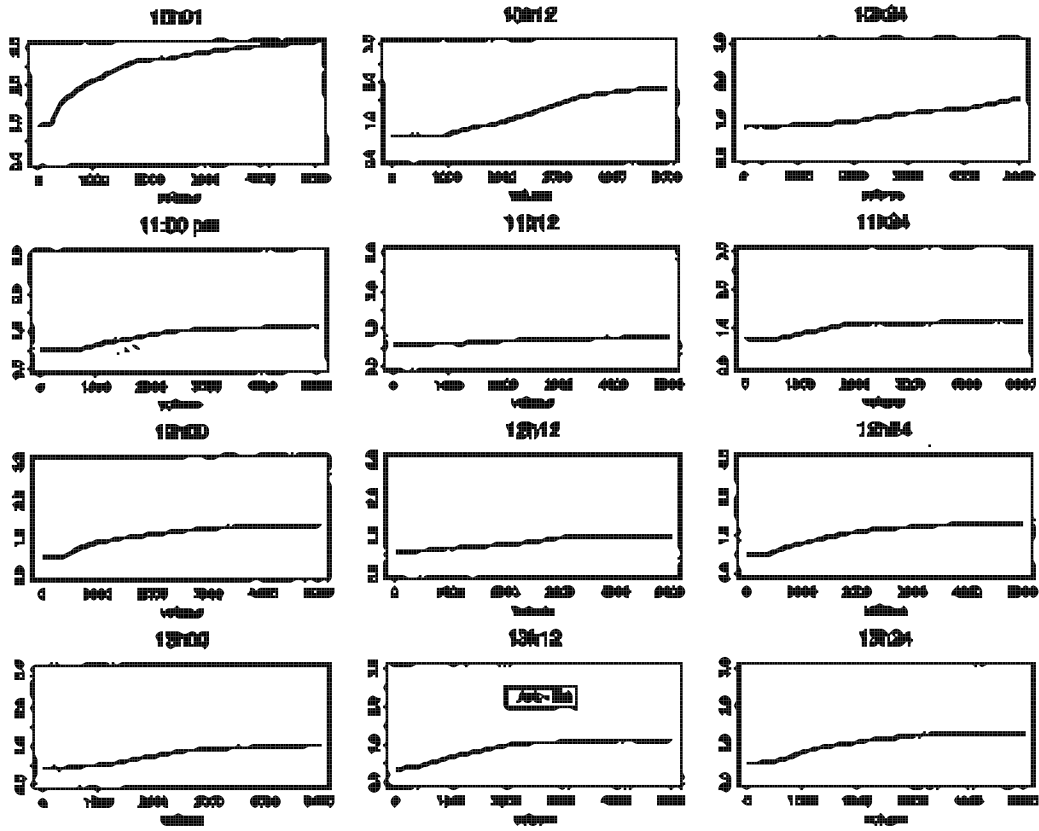


Figure 8 Fourchette vers 14 h 00, 15 h 00 et 16 h 00, Alcatel

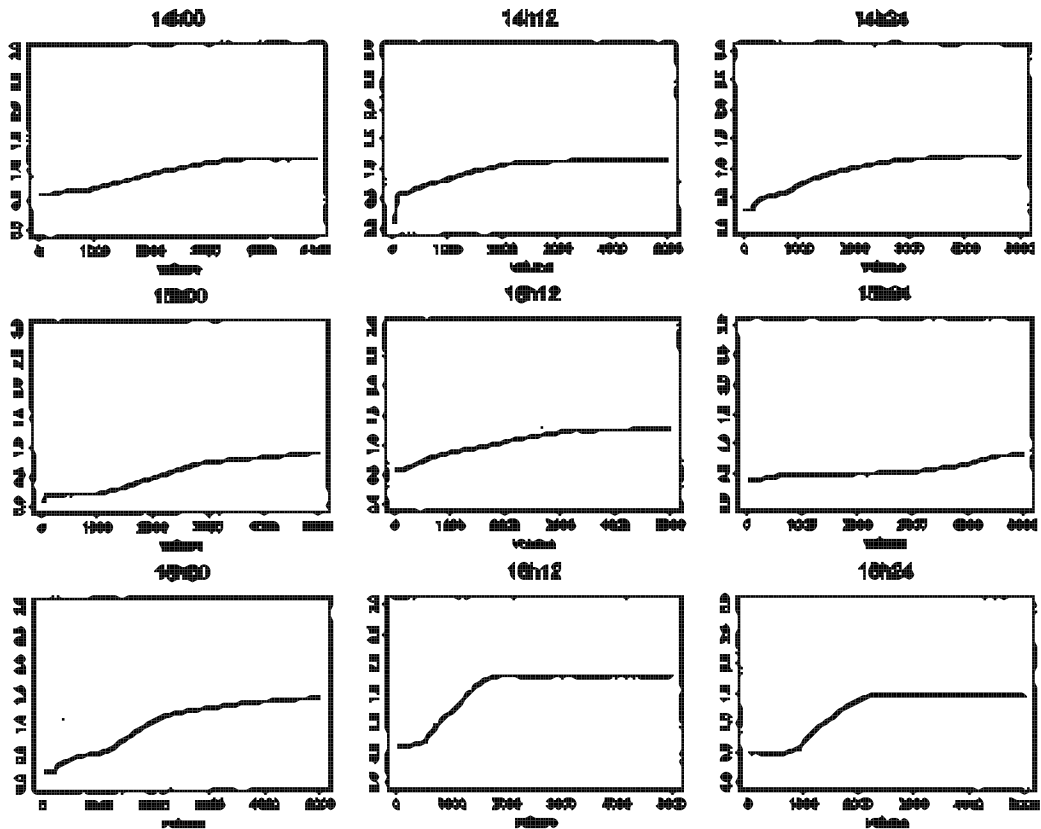


Figure 9 Surfaces bid et ask vues depuis deux endroits différents, Alcatel

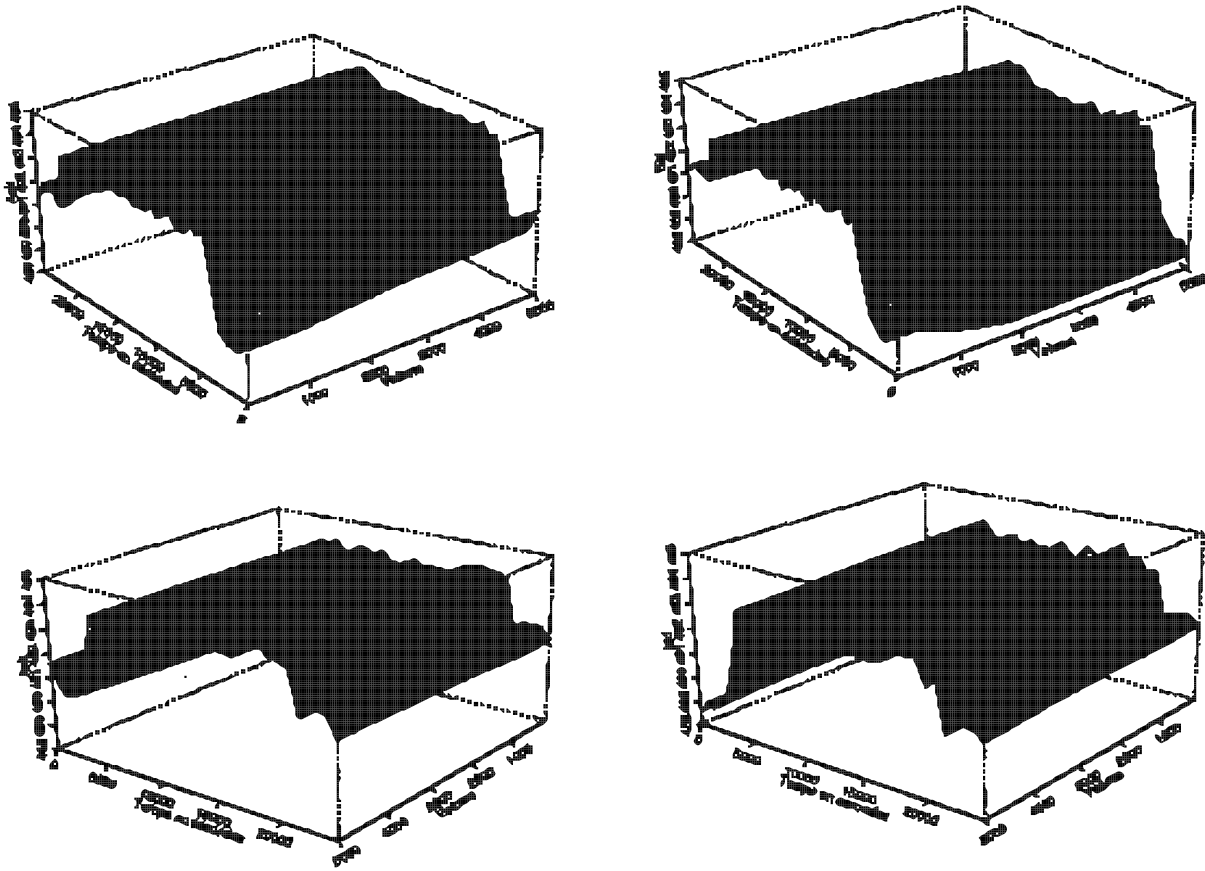
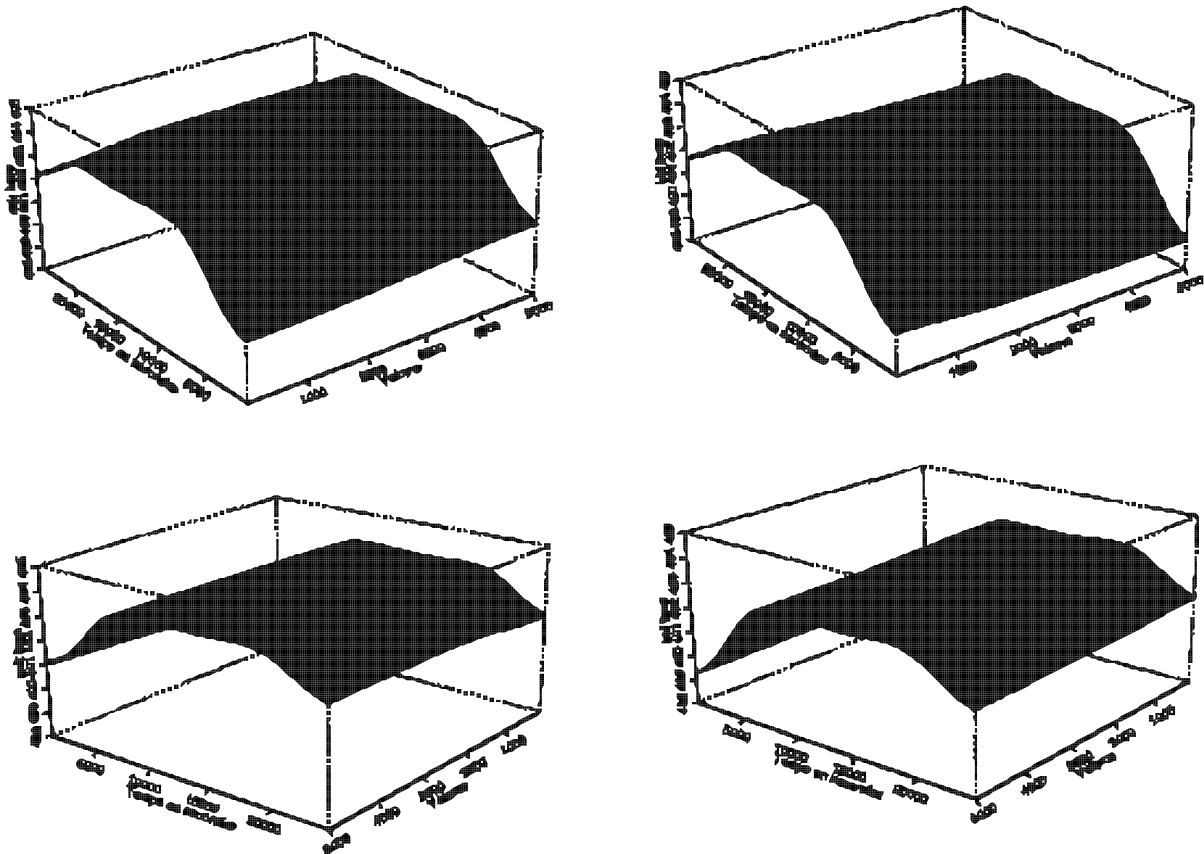


Figure 10 Surfaces lissées bid et ask vues depuis deux endroits différents, Alcatel



donne les surfaces *bid* et *ask* lissées en utilisant un noyau gaussien. La qualité du lissage dépend des choix des nœuds ϑ_j , t_j et des largeurs de fenêtre. Les nœuds sont toutes les 12 minutes et tous les 50 titres et les fenêtres sont respectivement $h_1 = 34$ minutes, $h_2 = 327$ titres.

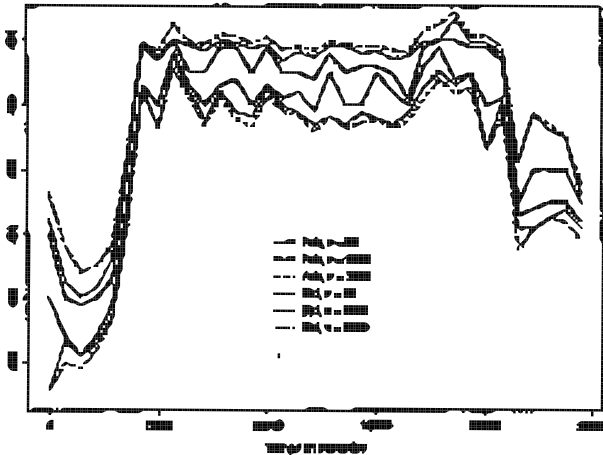
2. Analyse en composantes principales

Considérons un ensemble de volumes $\vartheta_1, \dots, \vartheta_n$ tel que pour les différentes dates t_j , $j=1, \dots, m$, les prix *bid* et *ask* soient tous observés. Leurs évolutions sont alors caractérisées par les deux séries temporelles multivariées :

$$a(t) = \begin{bmatrix} a_t(\vartheta_1) \\ \vdots \\ a_t(\vartheta_n) \end{bmatrix}, \quad b(t) = \begin{bmatrix} b_t(\vartheta_1) \\ \vdots \\ b_t(\vartheta_n) \end{bmatrix}, \quad t \in (t_1; L, t_m)$$

La figure 11 donne l'évolution des composantes de $a(t)$, $b(t)$, pour Alcatel, mardi 14 mai 1996, pour $\vartheta = 50, 2\,000, 5\,000$ titres, t variant de 10 h 00 à 17 h 00 par pas de 12 minutes.

Figure 11 Evolutions des bid et ask pour $v = 50, 2\,000$ et $5\,000$ actions, Alcatel



On observe une saisonnalité intra-journalière commune à tous les prix. On note aussi que les modifications du carnet d'ordres entre deux échanges peuvent concerner à la fois les prix *bid* et *ask*. Pour en comprendre la raison, considérons un instant de transaction. A cette date, le carnet d'ordres est :

Ordre d'achat	Prix limite	Ordre de vente
300	48.3	-
50	48.4	-
100	48.5	-
200	48.6	-
1 000	48.8	-
-	52	800
-	52.3	600
-	52.4	1 000
-	52.6	200
-	53	200

Le prochain état observable du carnet correspond à la transaction suivante. Entre les deux transactions, supposons que trois ordres de vente soient arrivés pour des quantités de 200, 500 et 1 200 titres, avec des prix limites respectifs de 51.5 FF, 51 FF et 48.6 FF. Les deux premiers ordres ne sont pas exécutés, mais simplement ajoutés à la file d'attente coté offre. Le dernier ordre par contre provoque une transaction et est exécuté contre les ordres d'achat de prix limites 48.8 FF et 48.6 FF. Le nouvel état du carnet d'ordres est :

Ordre d'achat	Prix limite	Ordre de vente
300	48.3	-
50	48.4	-
100	48.5	-
-	51	500
-	51.5	200
-	52	800
-	52.3	600
-	52.4	1000
-	52.6	200
-	53	200

Cet exemple montre comment les deux cotés du carnet d'ordres peuvent être simultanément affectés entre deux dates de transactions.

Les liaisons entre les évolutions des divers prix *bid* et *ask* peuvent être mises en évidence par une analyse en composantes principales $\vartheta = \vartheta_1, \dots, \vartheta_n$.

Cette analyse menée sur les séries en niveau, fournit une décomposition du type :

$$a_t(\vartheta) \equiv \sum_{k=1}^K \alpha_k(\vartheta) F_{kt}, \quad b_t(\vartheta) \equiv \sum_{k=1}^K \beta_k(\vartheta) F_{kt}, \quad \vartheta = \vartheta_1, \dots, \vartheta_n$$

où $(F_{k,t})$, $k=1, \dots, K$ sont les composantes principales sélectionnées.

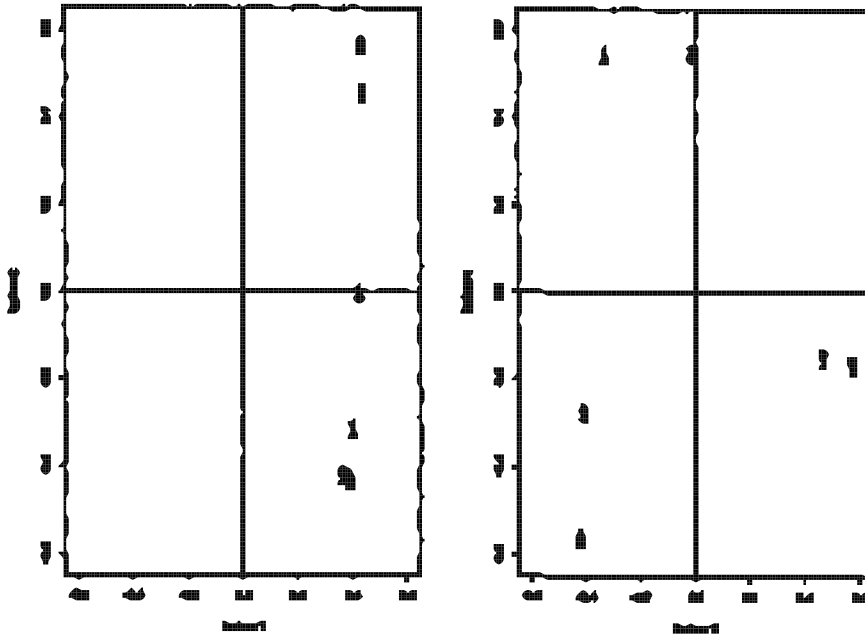
Elle a été menée pour Alcatel le 14 mai 1996 et les volumes $\vartheta = 50, 2\,000, 5\,000$ (appendice 2).

Le tableau 12 fournit les composantes des trois premiers facteurs et les proportions de variance expliquée.

Tableau 12 Analyse en composantes principales des séries de niveau de prix

	Facteurs		
a(50)	0.401	-0.330	0.536
a(2 000)	0.388	-0.420	-0.554
a(5 000)	0.364	-0.410	-0.269
b(50)	0.425	-0.016	0.537
b(2 000)	0.431	0.575	-0.159
b(5 000)	0.436	0.466	-0.142
Proportion de variance	0.98239	0.01333	0.00246
Proportion cumulée	0.98239	0.99572	0.99818

Les composantes du premier facteur sont approximativement les mêmes, ce qui conduit à interpréter ce facteur comme un prix «moyen». Le second facteur a des composantes négatives pour les prix *ask*, positives



(ou faiblement négatives) pour les prix *bid*. Ce facteur permet d'opposer les prix *bid* et les prix *ask*. Enfin, le dernier facteur, dont les poids sont faibles, donne un poids positif aux petits volumes et un poids négatif aux gros volumes. Il permet de distinguer les petits des gros volumes. Cette interprétation est confirmée par la figure 13 dans laquelle les six séries initiales *bid* et *ask* sont projetées sur le sous-espace engendré par les facteurs 1 et 2, et par les facteurs 2 et 3. Les Δ représentent les séries de prix *ask* et les \bullet représentent les séries de prix *bid*, indexés par 1, 2 et 3 pour $\vartheta = 50, 2000, 5000$ respectivement.

L'analyse descriptive précédente a été faite sur une action particulière et pour un jour particulier. Il est intéressant de voir si les résultats de l'analyse en composantes principales sont modifiés pour la même action, prise un jour différent. La même approche a été répétée pour Alcatel dans la journée du 5 juillet 1996 (appendice 2). Si les évolutions des courbes *bid* et *ask* sont assez différentes, probablement à cause du manque de volume en attente dans le carnet d'ordres, l'analyse en composantes principales conduit sensiblement aux mêmes interprétations pour les deux premiers facteurs (avec une proportion cumulée de variance expliquée de 0.99913). Par contre, le troisième facteur perd son interprétation. Ces résultats partiels motivent l'utilisation de modèles à deux ou trois facteurs dans une analyse plus structurelle des courbes *bid* et *ask*. Le choix d'un modèle à deux facteurs permet de prendre en compte les effets de niveau et de pente, alors que celui d'un modèle à trois facteurs permet en plus de prendre en compte les effets de convexité des courbes *bid* et *ask*.

III Analyse dynamique du carnet d'ordres

L'analyse en composantes principales précédente est essentiellement statique, mais fournit néanmoins des informations utiles pour déterminer un modèle à facteurs dynamiques. Dans ce but, on suit les étapes suivantes :

a) Dans un premier temps, on ne considère que les trois niveaux de volume $\vartheta = 50, 2000, 5000$ et on étudie si les facteurs «statiques» peuvent être remplacés par quelques fonctions simples des prix. Ces facteurs endogènes sont : un prix milieu de fourchette :

$$\text{mid}_t = \frac{a_t(\vartheta_1) + b_t(\vartheta_1)}{2}$$

et une fourchette : $\text{spread}_t = a_t(\vartheta_2) - b_t(\vartheta_2)$, les niveaux de volume impli-

cités ϑ_1 et ϑ_2 restant à déterminer.

b) Dans une seconde étape, on régresse après transformations logarithmiques, les différents prix observés sur ces deux résumés, et on examine les propriétés dynamiques des résidus, pour contrôler si toute la dynamique passe uniquement par le prix de milieu de fourchette et la fourchette.

c) Dans la troisième étape, on étudie les dynamiques jointes de ces deux facteurs endogènes.

d) Finalement, on regarde si le modèle dynamique avec ces deux facteurs est valable pour l'ensemble des courbes *bid* et *ask*, c'est-à-dire pour tous les niveaux de volumes, et on structure également, les fonctions dans leur composante volume.

1. Facteurs endogènes

On considère les deux premiers facteurs F_1 et F_2 de l'analyse en composantes principales, et on effectue les régressions par m.c.o. des séries associées sur un prix de milieu de fourchette et une fourchette, pour plusieurs valeurs de ϑ_1 et $\vartheta_2 \in (50, 2000, 5000)$. Le meilleur ajustement est obtenu pour $\vartheta_1 = 50$ et $\vartheta_2 = 2000$, et les régressions sont :

$$F_{1t} = 34.52 + 2.375 \text{mid}_t - 0.322 \text{spread}_t + u_{1t}, R^2 = 0.995, \\ (15.76) (0.032) \quad (0.104)$$

$$F_{2t} = -15.92 - 0.102 \text{mid}_t - 0.941 \text{spread}_t + u_{2t}, R^2 = 0.953, \\ (5.59) (0.011) \quad (0.037)$$

où : $\text{mid}_t = 1/2[a_t(50) + b_t(50)]$, $\text{spread}_t = a_t(2000) - b_t(2000)$. En particulier, la fourchette usuelle, plus

proche de $a_t(50) - b_t(50)$, ne donne pas assez d'information pour comprendre l'état du carnet d'ordres. Les deux facteurs sont approximativement en bijection avec ce milieu de fourchette et cette fourchette, et comme ces facteurs sont définis à une transformation affine près, ils peuvent être remplacés par ces deux résumés simples des courbes *bid* et *ask*.

Un tel modèle à deux facteurs est semblable au modèle introduit par Roll (1984) [voir aussi Glosten (1987), Glosten-Harris (1988) et Harris (1990)] pour décrire le prix observé P_t , supposé égal au *bid* ou au *ask*. Ce prix est dans ce modèle écrit :

$$P_t = V_t + 1/2 Q_t$$

où : $V_t = V_{t-1} + e_t$ est la valeur sous-jacente (ou fondamentale) de l'action à la date t , e_t l'innovation aléatoire correspondante et Q_t est un indicateur aléatoire qui vaut -1 si la transaction s'effectue au *bid*, +1 si elle s'effectue au *ask*. Q_t est supposé être un bruit blanc distribué uniformément et indépendamment de e_t . A partir d'un tel modèle, V_t peut être prévu par $(a_t + b_t)/2 = \text{mid}_t$, et le second facteur Q_t par la fourchette. Des modèles à trois facteurs ont été introduits pour expliquer l'évolution des prix *bid* et *ask* et s'appuient sur une valeur fondamentale de l'action, et sur une fourchette comportant une composante de sélection adverse et une composante de profit brut [voir Glosten (1987), Hasbrouck (1991a,b)]. Ces deux composantes ne semblent pas identifiables dans notre contexte.

2. Modèle à facteurs dynamiques

On doit maintenant vérifier si les facteurs statiques précédents peuvent aussi être considérés comme des facteurs dynamiques, c'est-à-dire s'il est possible d'écrire :

$$\begin{cases} \log a_t(\vartheta_i) = \alpha_{0i} + \alpha_{1i} \log \text{mid}_t + \alpha_{2i} \log \text{spread}_t + u_{it}, \\ i = 1, 2, 3 \\ \log b_t(\vartheta_i) = \beta_{0i} + \beta_{1i} \log \text{mid}_t + \beta_{2i} \log \text{spread}_t + v_{it}, \\ i = 1, 2, 3 \end{cases} \quad [9]$$

où $(u_{1t}, u_{2t}, u_{3t}, v_{1t}, v_{2t}, v_{3t})'$ est un bruit blanc. Si une telle formulation est valide, le modèle dynamique à six dimensions pour les prix *bid-ask* peut se réécrire sous forme récursive, où la partie dynamique concerne essentiellement les séries $(\log \text{mid}_t, \log \text{spread}_t)$ et où les relations entre les séries et les facteurs endogènes sont statiques. Les résultats des estimations sont donnés dans le tableau 14.

Les transformations log-normales des prix ont été introduites pour assurer la positivité des prix ajustés. Comme attendu :

- les valeurs des coefficients de détermination sont grandes (effet de cointégration),

Tableau 14 *Régressions sur les facteurs endogènes*

Variable dépendante	Constante	Mid	Spread	R ²
$a_t(50)$	0.0973 (0.0748)	0.9844 (0.0121)	0.0003 (0.0001)	0.9956
$a_t(2000)$	0.2156 (0.1244)	0.9654 (0.0201)	0.0007 (0.0001)	0.9869
$a_t(5000)$	0.6073 (0.1075)	0.9023 (0.0173)	0.0005 (0.0001)	0.9889
$b_t(50)$	-0.0974 (0.0749)	1.0156 (0.0121)	-0.0003 (0.0001)	0.996
$b_t(2000)$	0.1439 (0.1851)	0.9766 (0.0299)	-0.0012 (0.0002)	0.9767
$b_t(5000)$	-0.0016 (0.1788)	1.0000 (0.0288)	-0.0009 (0.0002)	0.9785

- les valeurs des coefficients α_{1i} et β_{1i} du prix milieu de fourchette sont similaires (proches de 1),
- les valeurs des coefficients α_{2i} et β_{2i} de la fourchette sont positives pour les prix *ask*, négatives pour les prix *bid*.

Les corrélogrammes et corrélogrammes croisés des résidus $(\hat{u}_{1t}), (\hat{u}_{2t}), (\hat{u}_{3t}), (\hat{v}_{1t}), (\hat{v}_{2t}), (\hat{v}_{3t})$ sont donnés dans l'appendice 3. Les autocorrélations estimées sont chacune non significatives.

Une analyse jointe des autocorrélations peut être effectuée en utilisant des agrégats comme les statistiques portmanteau [Box-Pierce (1970), Gouriéroux-Monfort (1995, p. 194)] :

$$\xi_{u_i, u_j} = T \sum_{k=1}^7 \hat{\rho}_{u_i, u_j}^2(k)$$

où $\hat{\rho}_{u_i, u_j}^2(k)$ est l'autocorrélation empirique d'ordre k entre les résidus \hat{u}_{it} et \hat{u}_{jt} . Les valeurs de ces statistiques doivent être comparées à la valeur critique à 5 % d'une loi du khi-deux à 7 degrés de liberté, égale à 14.07.

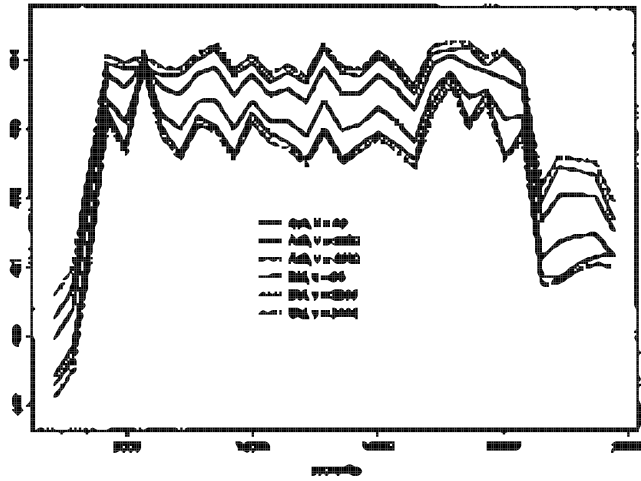
Tableau 15 *Statistiques portmanteau*

	u_1	u_2	u_3	v_1	v_2	v_3
u_1	2.33	7.72	4.87	2.34	5.46	9.10
u_2	2.40	4.14	1.24	2.40	4.71	2.26
u_3	2.56	4.11	4.30	2.56	4.15	3.21
v_1	2.33	7.72	4.88	2.34	5.46	9.11
v_2	5.51	3.97	5.78	5.51	4.34	1.24
v_3	5.36	2.44	8.76	5.36	3.81	1.76

De ces résultats, on déduit que le terme d'erreur peut être considéré comme un bruit blanc faible. De plus, comme les facteurs endogènes sont des fonctions simples des prix *bid* et *ask*, les termes d'erreur sont aussi non corrélés avec les valeurs retardées des facteurs, et pas seulement avec leurs valeurs courantes.

La reconstruction des prix *bid* et *ask* à partir du modèle à facteurs estimés, supposant les variables *mid* et *spread* connues, est donnée figure 16. Les prix ajustés correspondent aux espérances conditionnelles suivantes :

Figure 16 *Courbes bid et ask ajustées, Alcatel*



$$\begin{cases} \hat{a}_t(\vartheta) = E[a_t(\vartheta) / \text{mid}_t, \text{spread}_t, I_{t-1}] \\ \hat{b}_t(\vartheta) = E[b_t(\vartheta) / \text{mid}_t, \text{spread}_t, I_{t-1}] \end{cases}$$

où $I_{\{t-1\}}$ représente l'information disponible en $t-1$. Même si nous n'avons pas introduit dans notre modélisation de contraintes sur les paramètres et les distributions pour assurer la monotonie des courbes de prix *bid* et *ask*, on constate qu'elles s'ordonnent correctement, sauf en un point particulier. De plus, la forme de ces courbes ajustées est très proche de celle observée pour les séries initiales.

3. Évolution des facteurs endogènes

On doit maintenant compléter le modèle à facteurs endogènes en analysant les dynamiques jointes des facteurs mid_t et spread_t . Les évolutions de ces séries vont être étudiées après avoir pris la différence première de $\log \text{mid}_t$ (figure 17).

Les fonctions d'autocorrélation des séries $\Delta \log \text{mid}$ et $\log \text{spread}$ montrent que les séries sont des bruits blancs faibles. C'est pourquoi, dans un cadre linéaire, les différentes séries de prix peuvent être

pré-vues à l'horizon 1 par des formules du type :

$$\begin{cases} \log \hat{a}_t(\vartheta_i) = \hat{\alpha}_{0i} + \hat{\alpha}_{1i} \log \text{mid}_{t-1} + \hat{\alpha}_{2i} \log \text{spread} \\ \log \hat{b}_t(\vartheta_i) = \hat{\beta}_{0i} + \hat{\beta}_{1i} \log \text{mid}_{t-1} + \hat{\beta}_{2i} \log \text{spread} \end{cases}$$

où : $\overline{\log \text{spread}} = -0.0964$ est la moyenne de la fourchette prise en logarithme. Les prévisions des séries basées sur ce modèle de marche aléatoire pour le prix de milieu de fourchette et un modèle de bruit blanc pour la fourchette sont données dans la figure 18.

Ce résultat est compatible avec le modèle de Roll, dans lequel la valeur fondamentale (approchée par le milieu de fourchette) est supposée être une marche

Figure 17 *Trajectoires de $\Delta \log \text{mid}$ and $\log \text{spread}$, Alcatel*

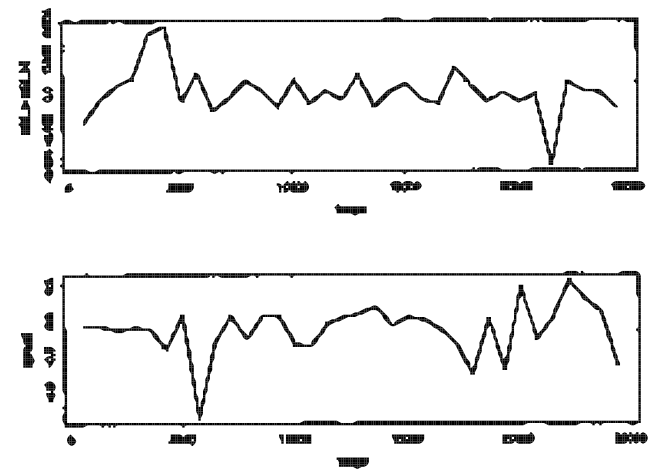
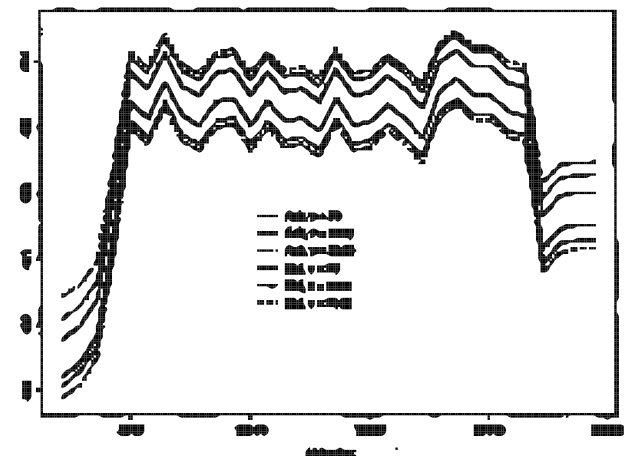


Figure 18 *Séries bid et ask prévues par le modèle de marche aléatoire pour le mid et de bruit blanc pour le spread, Alcatel*



aléatoire, et la variable Q_t (approchée par la fourchette) un bruit blanc. Cependant, ce bruit n'est pas ici de moyenne nulle [voir Choi-Salandro-Shastri (1988) pour une extension du modèle de Roll dans cette direction]. La seule manière d'améliorer ces prévisions est d'introduire une dynamique non linéaire. La fourchette par exemple est sans doute liée à la volatilité passée du prix, qui peut être approchée par des valeurs retardées $|\Delta \log \text{mid}_{t-1}|, |\Delta \log \text{mid}_{t-2}|, \dots$. Nous nous sommes restreints à des modèles autorégressifs à effet de seuil [Tong-Lin (1980)] et avons abouti au modèle estimé ci-dessous, où les chiffres entre parenthèses sont les statistiques de student :

$$\Delta \log \text{mid}_t = -0.0002 + 0.0408 |\Delta \log \text{mid}_{t-1}|, R^2 = 0.1. \quad (0.75) \quad (1.81)$$

$$\begin{aligned} \log \text{spread}_t = & 0.333 + 0.203 \log \text{spread}_{t-1} - 37.33 |\Delta \log \text{mid}_{t-1}| \\ & (3.43) \quad (1.17) \quad (1.07) \\ & + 66.00 |\Delta \log \text{mid}_{t-2}|, R^2 = 0.16. \quad (1.88) \end{aligned}$$

Les prévisions à horizon 1 fondées sur l'information I_{t-1} sont alors du type :

$$\begin{cases} \log \hat{a}_t(\vartheta_i) = \hat{\alpha}_{0i} + \hat{\alpha}_{1i}(\log \widehat{\text{mid}}_{t-1} + \Delta \log \widehat{\text{mid}}_t) + \hat{\alpha}_{2i} \log \widehat{\text{spread}}_t \\ \log \hat{b}_t(\vartheta_i) = \hat{\beta}_{0i} + \hat{\beta}_{1i}(\log \widehat{\text{mid}}_{t-1} + \Delta \log \widehat{\text{mid}}_t) + \hat{\beta}_{2i} \log \widehat{\text{spread}}_t \end{cases}$$

où $\Delta \log \widehat{\text{mid}}_t$ et $\log \widehat{\text{spread}}_t$ sont les valeurs ajustées correspondant aux autorégressions non linéaires précédentes. Les courbes *bid* et *ask* ajustées sont données dans la figure 19.

Les dynamiques non linéaires précédentes impliquent que, dans un cadre non linéaire, ni le prix de milieu de fourchette différencié, ni la fourchette ne sont des bruits blancs forts, et l'estimateur standard de la covariance [voir Glosten (1987), Glosten-Harris (1988), Harris (1990)], basé sur le modèle de Roll, ne peut être utilisé.

4. Prévisions des surfaces bid et ask et interprétations factorielles

Les parties précédentes sont des étapes nécessaires avant de déterminer des prévisions de surfaces *bid* et *ask*. L'approche est la suivante :

a) On suppose que les deux facteurs endogènes $\log \text{mid}$ et $\log \text{spread}$ sont des facteurs dynamiques quel que soit le niveau de volume. On obtient le modèle :

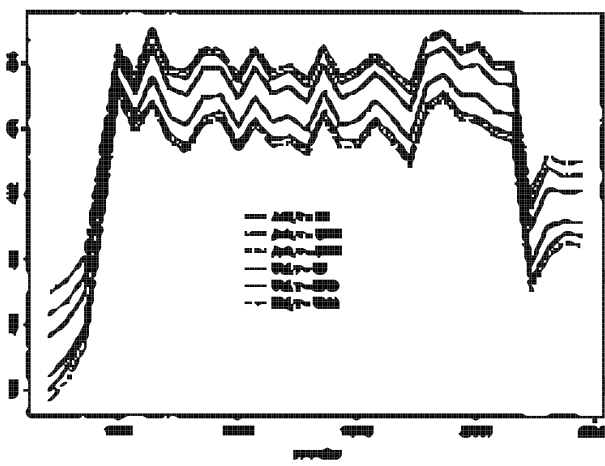
$$\begin{cases} \log a_t(\vartheta) = \alpha_0(\vartheta) + \alpha_1(\vartheta) \log \text{mid}_t \\ \quad + \alpha_2(\vartheta) \log \text{spread}_t + u_t(\vartheta), \forall \vartheta \\ \log b_t(\vartheta) = \beta_0(\vartheta) + \beta_1(\vartheta) \log \text{mid}_t \\ \quad + \beta_2(\vartheta) \log \text{spread}_t + v_t(\vartheta), \forall \vartheta \end{cases}$$

b) On estime alors les valeurs $\alpha_i(\vartheta_j)$, $\beta_i(\vartheta_j)$, $i = 0, 1, 2$, pour une grille de volumes $\vartheta_1, \dots, \vartheta_N$. La grille utilisée ici va de $\vartheta_1 = 50$ à $\vartheta_N = 5000$ par pas de 50 titres. On obtient six vecteurs de coefficients de longueur 100.

c) Ces valeurs sont utilisées pour déterminer des formes paramétriques des différents coefficients fonctions du volume.

d) Puis les coefficients ajustés sont injectés dans le modèle factoriel :

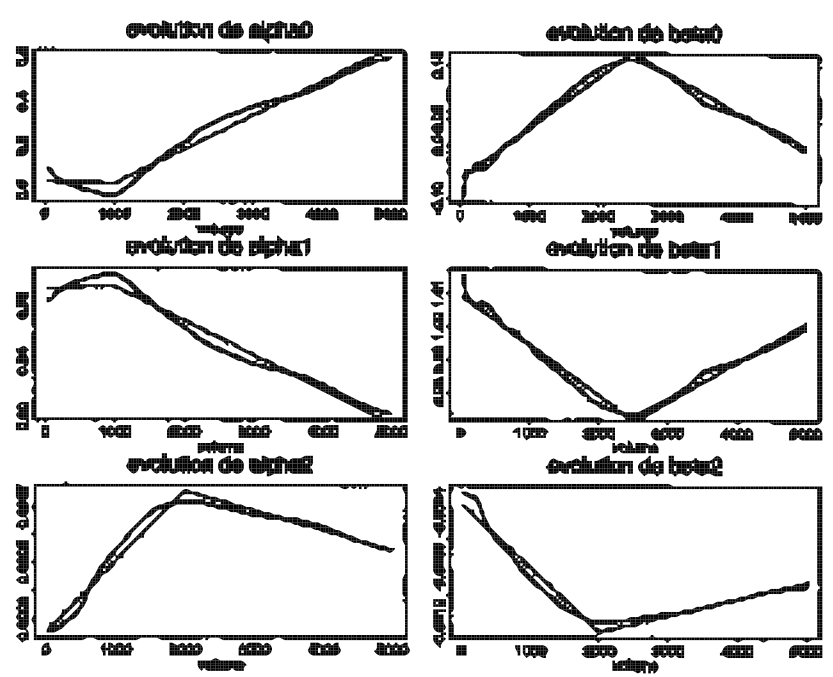
Figure 19 *Bid et ask ajustés correspondant aux autorégressions non linéaires, Alcatel*

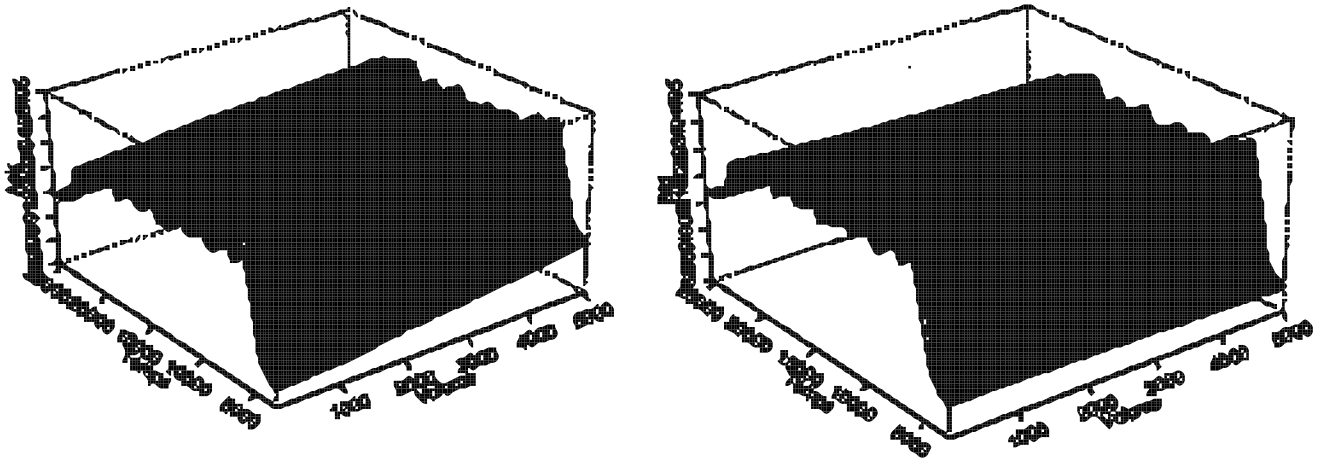


$$\begin{cases} \log \hat{a}_t(\vartheta) = \hat{\alpha}_0(\vartheta) + \hat{\alpha}_1(\vartheta) \log \widehat{\text{mid}}_t + \hat{\alpha}_2(\vartheta) \log \widehat{\text{spread}}_t \\ \log \hat{b}_t(\vartheta) = \hat{\beta}_0(\vartheta) + \hat{\beta}_1(\vartheta) \log \widehat{\text{mid}}_t + \hat{\beta}_2(\vartheta) \log \widehat{\text{spread}}_t \end{cases}$$

La figure 20 donne en trait plein les coefficients estimés $\alpha_i(\cdot)$, $\beta_i(\cdot)$, $i = 0, 1, 2$. Ces courbes apparaissent approximativement linéaires par morceaux, ce qui conduit à les approcher par des modèles paramétriques pour décrire de telles courbes (annexe 4). Les formes ajustées de ces fonctions déduites de ce modèle sont représentées par les courbes en pointillés ; ainsi chaque coefficient fonctionnel s'écrit comme une combinaison de $g_j(\vartheta)$, $j = 0, \dots, 4$ où ces fonctions sont affines par morceaux, avec des nœuds à 1000, 2000 et 2500 titres [voir Eubank (1988)].

Figure 20 *Évolution des coefficients $\alpha_i(\vartheta)$, $\beta_i(\vartheta)$ et des coefficients ajustés associés, (ϑ) variant, Alcatel*





Les fonctions *bid* et *ask* admettent une double décomposition factorielle : celle à facteurs endogènes dynamiques (figure 16), où les évolutions des prix *bid* et *ask* sont transformées affines des évolutions des deux facteurs sous-jacents, mais aussi une décomposition dans la dimension volume. Considérées en coupe instantanée, les fonctions *bid* et *ask* sont en effet fonctions affines de quatre fonctions de base :

$$\log a_i(\vartheta) = \sum_{i=0}^4 \gamma_{it}^a g_i(\vartheta), \quad \log b_i(\vartheta) = \sum_{i=0}^4 \gamma_{it}^b g_i(\vartheta)$$

L'estimation factorielle nous conduit donc à des décompositions par splines avec des coefficients dépendant de façon non linéaire de la trajectoire passée de prix. Les fonctions affines par morceaux, encore appelées splines polynomiaux de degré 1, apparaissent ici adaptées, car elles permettent de repérer les effets de seuil volume constatés sur les courbes *bid* et *ask*, c'est-à-dire le fait que les courbes s'écartent brusquement à un certain niveau de volume, et de prévoir l'évolution de ce seuil.

Les formes des coefficients α et β peuvent être discutées, mais avec prudence. Il faut se souvenir que les pentes des fonctions *bid* et *ask* ont des interprétations en termes de volatilité. Les coefficients donnent les composantes de ces pentes dans la décomposition factorielle. Les formes des fonctions α_j et β_j , $j = 0, 1, 2$ sont évidemment inversées, mais comme attendu non symétriques l'une de l'autre. En particulier les seuils ne sont pas au même endroit pour les courbes *ask* (1 000, 2 000) et pour les courbes *bid* (2 000, 2 500). Une modification du niveau de prix moyen à fourchette inchangée entraîne un écartement des courbes *bid* et *ask* pour les petits volumes et un resserrement pour les forts volumes. L'impact sur les courbes de prix de variations de fourchettes apparaissent relativement faibles.

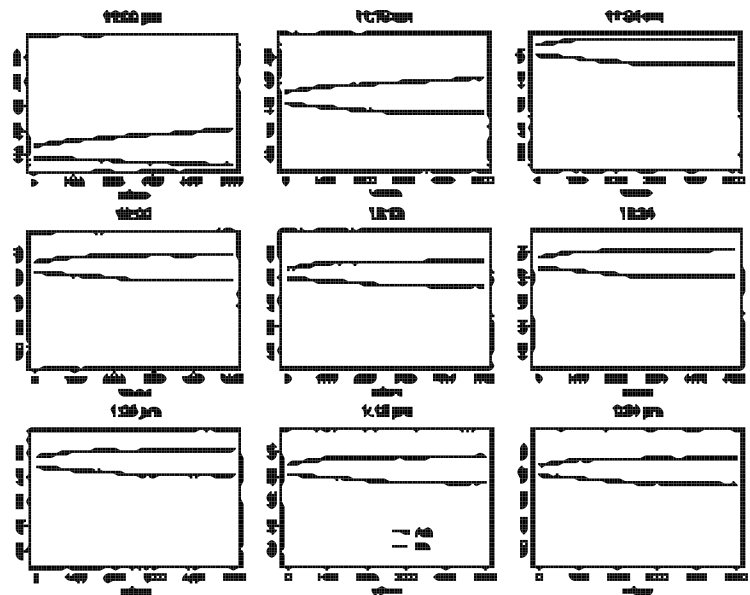
Dans la figure 21, on donne les surfaces *bid* et *ask* prévues à partir des équations ci-dessus et dans la figure 22, les courbes *bid* et *ask* prévues pour différents moments de la journée.

* * *

Dans ce texte nous avons discuté l'intérêt que peuvent représenter les courbes *bid* et *ask* pour l'analyse de court terme des marchés financiers, et nous avons mis en évidence une double représentation factorielle de leurs dynamiques. Cette étude est l'une des premières en statistique appliquée à considérer des séries temporelles fonctionnelles, c'est-à-dire des séries dont les composantes sont des courbes. Cet article montre que beaucoup d'informations peuvent être analysées à partir de méthodes classiques de statistique descriptive telles que l'analyse en composantes principales, les splines, les représentations linéaires dynamiques.

Il reste à introduire des modèles structurels liant le comportement de dépôt d'ordres et la définition du système d'appariement et permettant d'expliquer les dynamiques observées pour le carnet d'ordres. ■

Figure 22 *Courbes bid et ask, vers 11 h 00, 12 h 00 et 13 h 00, Alcatel*



Bibliographie

Admati, A., et P. Pfleiderer (1988) : «A Theory of Intra-Day Patterns : Volume and Price Variability», *Review of Financial Studies*, 1, 3-40.

Amihud, Y., et H. Mendelson (1980), «Dealership Market», *Journal of Financial Economics*, 8, 31-53.

Bhattacharya, M. (1986) : «Direct Tests of Bid/Ask Models», DP, *Graduate School of Business*, University of Michigan.

Box, G. et D. Pierce (1970) : «Distribution of Residual Autocorrelation in Autoregressive Integrated Moving Average Time Series Models», *Journal of the American Statistical Association*, 65, 1509-1529.

Boyer, C. et G. Le Fol (1998) : «Temps Aléatoire et Dynamique du Carnet d'Ordres», *Document de travail CREST*.

Choi, J., Salandro, D., et K., Shastri (1988) : «On the Estimation of Bid-Ask Spreads : Theory and Evidence», *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 23, 219-230.

Cohen, K. J., Maier, S. F., Schwartz, R. A. et D. K., Whitcomb (1979) : «Transaction Costs, Order Placement Strategy and Existence of the Bid-Ask Spread», *Journal of Political Economy*, 89, 287-305.

Copeland, T., et D., Galai (1983), «Information Effects on the Bid-Ask Spread», *Journal of Finance*, 38, 1457-69.

Eubank, R. (1988) : «Spline Smoothing and Nonparametric Regression», New York, Marcel Dekker.

French, K., et R., Roll (1986) : «Stock Return Variances : The Arrival of Information and Reaction of Traders», *Journal of Financial Economics*, 17, 5-26.

George, T, Kaul, G. et M., Nimalendran (1991) : «Estimation of the Bid-Ask Spread and Its Components : A New Approach», *Review of Financial Studies*, 4, 623-656.

George, T., et F., Longstaff (1993) : «Bid-Ask Spreads and Trading Activity in the S&P 100 Index Options Market», *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 28, 381-397.

[13] Glosten, L. (1987) : «Component of the Bid-Ask Spread and the Sta-

tistical Properties of the Transaction Prices», *Journal of Finance*, 42, 1293-1307.

Glosten, L., et L., Harris (1988) : «Estimating the Components of the Bid-Ask Spread», *Journal of Financial Economics*, 21, 123-147.

Glosten, L., et P., Milgrom (1985) : «Bid-Ask and Transaction Prices in a Specialist Market with Heterogeneously Informed Traders», *Journal of Financial Economics*, 14, 71-100.

Gouriéroux, C. et G. Le Fol (1997) : «Matching Procedures and Market Characteristics», *Document de Travail CREST 9815*, version française DP CEPREMAP 9714.

Gouriéroux, C. et A. Monfort (1995) : «Series Temporelles et Modèles Dynamiques», *Economica*, deuxième édition, p 194.

Harris, L. (1990) : «Statistical Properties of the Roll Serial Covariance Bid/Ask Spread Estimator», *Journal of Finance*, 45, 579-590.

Hasbrouck, J. (1991a) : «Measuring the Information Content of Stock Trades», *Journal of Finance*, 46, 179-207.

Hasbrouck, J. (1991b) : «The Summary Informativeness of Stock Trades : An Econometric Analysis», *Review of Financial Studies*, 4, 571-595.

Moody, J., et L., Wu (1995) : «Statistical Analysis and Forecasting of High Frequency Exchange Rates», Oregon Graduate Institute, Portland.

Roll, R. (1984) : «A Simple Measure of the Effective Bid-Ask Spread in an Efficient Market», *Journal of Finance*, 39, 1127-1134.

SBF-Bourse de Paris (1996) : «BDM Bourse de Paris, Base de Données», version 1.1, (janvier 1996).

Stoll, H. (1978) : «The Supply of Dealer Services in Securities Markets», *The Journal of Finance*, 33, 1133-1151.

Stoll, H. (1989) : «Inferring the Components of the Bid-Ask Spread : Theory and Empirical Tests», *Journal of Finance*, 44, 115-134.

Tong, M., et K., Lin (1980) : «Threshold Autoregressions, Limit Cycles and Cyclical Data», *Journal of Royal Statistical Society B*, 42, 245-292.

Notes

- (1) Un ordre au mieux est un ordre de vente ou d'achat assorti d'une quantité à échanger, mais d'aucune limite de prix.
- (2) Un ordre limite est un ordre de vente ou d'achat dans lequel est stipulé, non seulement la quantité souhaitée, mais aussi le prix minimum ou maximum que l'investisseur est prêt à recevoir ou à payer.
- (3) Ou mieux. Notre exemple étant construit à partir de la partie diffusée

du carnet d'ordres, le prix unitaire calculé ne tient pas compte des ordres cachés. Ainsi, le prix unitaire proposé est le prix qu'obtiendrait un investisseur acheteur s'il n'y avait pas d'ordre caché dans le carnet à cet instant.

(4) Le marché de blocs est un marché dirigé par les cotations, sur lequel, à chaque instant, un teneur de marché propose des prix d'achat et de vente.

Appendice 1. Comment fonctionne un carnet d'ordres

On considère par exemple un fichier d'ordres de vente. Il est composé des différents volumes proposés pour les différents prix limites. Si A, B, C, D... désignent les noms des offreurs, le fichier d'ordres peut être :

Fichier des ordres de vente

Prix	48.5	48.6	48.8	49.2	49.3
	A 100	B 50	C 200	A 50	D 200
	B 250	C 300	A 800	A 100	-
Volumes	E 100	E 150	B 50	B 150	-
	A 100	A 50	-	A 100	-
	D 300	-	-	-	-

Dans les calculs de l'article, les contrats sont agrégés par limite de prix de la façon suivante :

Fichier d'ordres de vente agrégés (fichier offre)

Prix	48.5	48.6	48.8	49.2	49.3
Volume agrégé	850	550	105	400	200
Nombre d'offres	5	4	3	4	1

Considérons maintenant un acheteur qui veut échanger un volume $\vartheta = 1000$ au prix limite 50. Il est satisfait par les contrats suivants :

Exécution d'un ordre d'achat (demande) important contre plusieurs ordres de vente (offre)

Nom de la contrepartie	Prix	Volume
A	48.5	100
B	48.5	250
C	48.5	100
A	48.5	100
D	48.5	300
B	48.6	50
C	48.6	100

On a cinq contrats à 48.5 FF pour un volume total de 850, deux contrats à 48.6 FF pour un volume de 150, et le prix moyen unitaire est :

$$(48.5 \times 850 + 48.6 \times 150) / 1000 = 48.52 \text{ FF.}$$

Après ces échanges simultanés, le fichier des ordres de vente devient :

Nouveau fichier des ordres de vente

Prix	48.6	48.8	49.2	49.3
	C 200	C 200	A 50	D 200
Volumes	E 150	A 800	A 100	
	A 50	B 50	B 150	
			A 100	

Appendice 2. Analyse en composantes principales, Alcatel.

Analyse en composantes principales, le 14 mai 1996

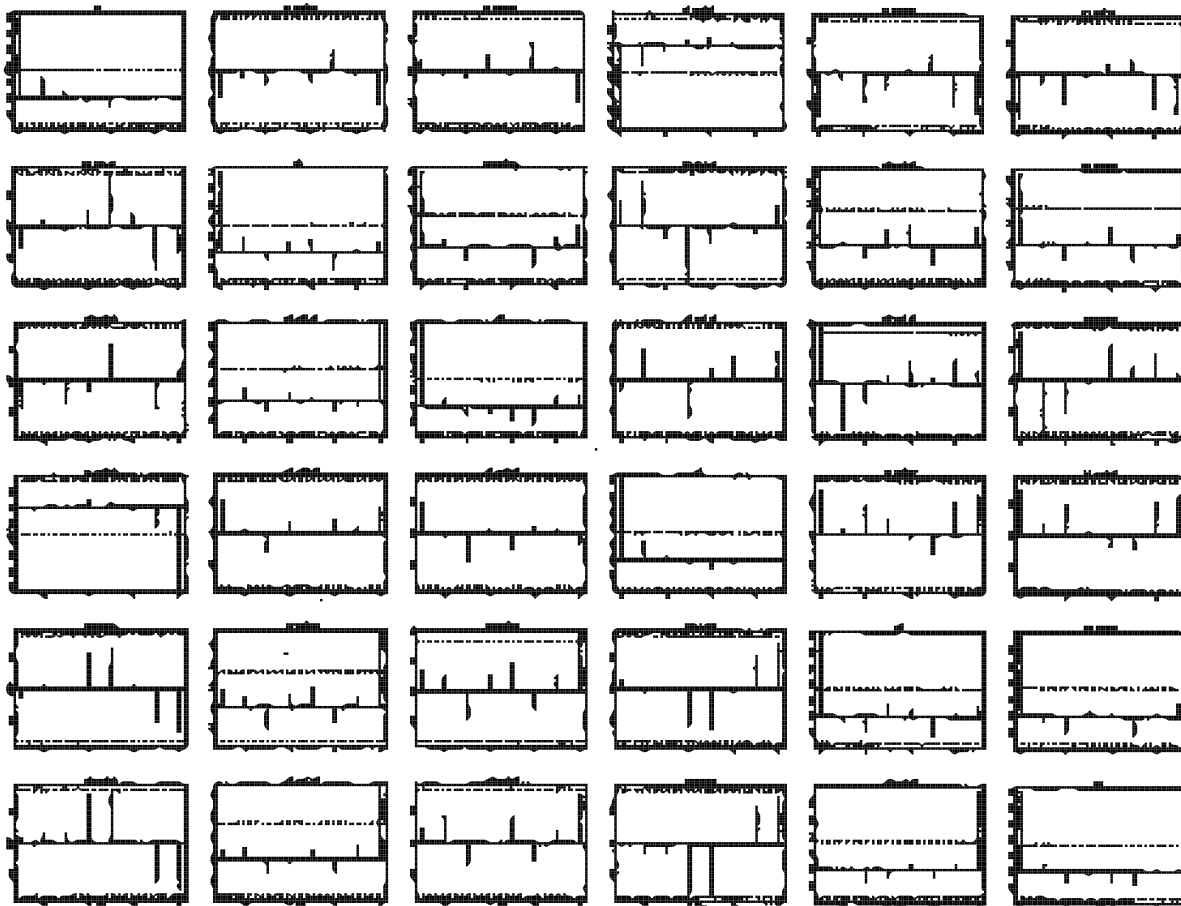
Séries multivariées [a(t)', b(t)']						
Composantes						
	Comp. 1	Comp. 2	Comp. 3	Comp. 4	Comp. 5	Comp. 6
Valeurs propres	10.44946	0.14178	0.02620	0.01331	0.00399	0.00202
Proportion de la variance	0.98239	0.01333	0.00246	0.00125	0.00038	0.00019
Proportion cumulée	0.98239	0.99572	0.99818	0.99943	0.99981	1.00000
Facteurs						
	Comp. 1	Comp. 2	Comp. 3	Comp. 4	Comp. 5	Comp. 6
a(50)	0.401	-0.330	0.536	0.645	-0.119	-0.111
a(2000)	0.388	-0.420	-0.554	-0.143	-0.456	-0.372
a(5000)	0.364	-0.410	-0.269	-0.015	0.656	0.444
b(50)	0.425	-0.016	0.537	-0.727	-0.013	-0.042
b(2000)	0.431	0.575	-0.159	0.144	0.409	-0.519
b(5000)	0.436	0.466	-0.142	0.112	-0.425	0.617

Analyse en composantes principales, le 5 juillet 1996

Séries multivariées [a(t)', b(t)']						
Composantes						
	Comp. 1	Comp. 2	Comp. 3	Comp. 4	Comp. 5	Comp. 6
Valeurs propres	81.5663	0.31734	0.04429	0.01451	0.01066	0.002
Proportion de la variance	0.99526	0.00387	0.00054	0.000178	0.00013	0.00002
Proportion cumulée	0.99526	0.99913	0.99967	0.99985	0.99998	1.00000
Facteurs						
	Comp. 1	Comp. 2	Comp. 3	Comp. 4	Comp. 5	Comp. 6
a(50)	0.413	-0.215	0.723	0.322	0.395	-0.026
a(2000)	0.410	-0.448	0.09	-0.755	-0.225	-0.057
a(5000)	0.399	-0.532	-0.549	0.493	-0.100	0.062
b(50)	0.415	0.366	-0.401	-0.230	0.677	-0.146
b(2000)	0.403	0.417	0.069	0.176	-0.504	-0.612
b(5000)	0.410	0.402	0.053	0.012	-0.266	0.772

Appendice 3. Autocorrélogrammes et corrélogrammes croisés des résidus

Corrélogrammes et corrélogrammes croisés des résidus



Appendice 4. Résultats des régressions

1) Formes paramétriques des coefficients $\alpha_i(\vartheta)$ et $\beta_i(\vartheta)$, avec $i=0,1,2$:

$$\alpha_0(\vartheta) = 0.0335 - 9.39 \cdot 10^{-6} (\vartheta - 1000) \mathbb{1}_{\vartheta < 1000} + 0.00015 (\vartheta - 1000) \mathbb{1}_{\vartheta > 1000} + u_0(\vartheta)$$

(4.891) (-0.541) (50.748)

$$\alpha_1(\vartheta) = 0.994739 + 1.5910^{-6} (\vartheta - 1000) \mathbb{1}_{\vartheta \leq 1000} - 2.48310^{-5} (\vartheta - 1000) \mathbb{1}_{\vartheta > 1000} + u_1(\vartheta),$$

(901.366) (0.569) (-50.767)

$$\alpha_2(\vartheta) = 0.00076 + 2.52 \cdot 10^{-7} (\vartheta - 2000) \mathbb{1}_{\vartheta \leq 2000} - 7.1 \cdot 10^{-8} (\vartheta - 2000) \mathbb{1}_{\vartheta > 2000} + u_2(\vartheta),$$

(155.791) (50.275) (-23.614)

$$\beta_0(\vartheta) = 0.1764 + 9.576 \cdot 10^{-5} (\vartheta - 2500) \mathbb{1}_{\vartheta \leq 2500} - 7.38755 \cdot 10^{-5} (\vartheta - 2500) \mathbb{1}_{\vartheta > 2500} + \vartheta_0(\vartheta),$$

(85.883) (59.476) (-46.999)

$$\beta_1(\vartheta) = 0.97135 - 1.549 \cdot 10^{-5} (\vartheta - 2500) \mathbb{1}_{\vartheta \leq 2500} + 1.191 \cdot 10^{-5} (\vartheta - 2500) \mathbb{1}_{\vartheta > 2500} + \vartheta_1(\vartheta),$$

(2928.4) (-59.562) (46.907)

$$\beta_2(\vartheta) = -0.00126 - 4.62 \cdot 10^{-7} (\vartheta - 2000) \mathbb{1}_{\vartheta \leq 2000} + 1.17 \cdot 10^{-7} (\vartheta - 2000) \mathbb{1}_{\vartheta > 2000} + \vartheta_2(\vartheta),$$

(-132.99) (-47.413) (19.99)

2) En réinjectant ces coefficients dans le modèle :

$$\begin{cases} \log \hat{a}_t(\vartheta) = \hat{\alpha}_0(\vartheta) + \hat{\alpha}_1(\vartheta) \log \text{mid}_t + \hat{\alpha}_2(\vartheta) \log \text{spread}_t \\ \log \hat{b}_t(\vartheta) = \hat{\beta}_0(\vartheta) + \hat{\beta}_1(\vartheta) \log \text{mid}_t + \hat{\beta}_2(\vartheta) \log \text{spread}_t \end{cases}$$

nous obtenons :

$$\log \alpha_t(\vartheta) = [0.042896 + 0.99314 \log \widehat{\text{mid}}_t + 0.00025 \log \widehat{\text{spread}}_t] \cdot g_0(\vartheta) + [-9.394 \cdot 10^{-6} - 1.59 \cdot 10^{-6} \log \widehat{\text{mid}}_t + 2.5 \cdot 10^{-7} \log \widehat{\text{spread}}_t] \cdot g_1(\vartheta) + [1.63 \cdot 10^{-4} - 2.64 \cdot 10^{-5} \log \widehat{\text{mid}}_t] \cdot g_2(\vartheta) + [1.81 \cdot 10^{-7}] \cdot g_3(\vartheta)$$

$$\log \beta_t(\vartheta) = [-0.06304 + 1.01008 \log \widehat{\text{mid}}_t - 0.00033 \log \widehat{\text{spread}}_t] \cdot g_0(\vartheta) + [9.58 \cdot 10^{-5} - 1.55 \cdot 10^{-5} \log \widehat{\text{mid}}_t - 4.62 \cdot 10^{-7} \log \widehat{\text{spread}}_t] \cdot g_1(\vartheta) + [5.79 \cdot 10^{-7} \log \widehat{\text{spread}}_t] \cdot g_3(\vartheta) + [-0.00017 + 2.74 \cdot 10^{-5} \log \widehat{\text{mid}}_t] \cdot g_4(\vartheta)$$

où $\{g_0(\vartheta), g_1(\vartheta), g_2(\vartheta), g_3(\vartheta), g_4(\vartheta)\}$ est la base $\{1, \vartheta, (\vartheta - 1000), \mathbb{1}_{\vartheta > 1000}, (\vartheta - 2000) \mathbb{1}_{\vartheta > 2000}, (\vartheta - 2500) \mathbb{1}_{\vartheta > 2500}\}$

BANQUE
MARCHÉS

les Entretiens de Banque & Marchés

Dans le cadre du cycle de séminaires de recherche financière appliquée, Banque & Marchés et l'Association française de finance (AFFI) ont le plaisir de vous proposer d'assister aux 4^e «**Entretiens de Banque & Marchés**».

Jeudi 19 novembre 1998,
à 18 heures

dans les locaux de l'Association française des banques
18 rue La Fayette, 75009 Paris

LES MODÈLES PEUVENT-ILS EXPLIQUER LES CRISES DE CHANGE ?

Exposé de **Florin Aftalion**, professeur à l'ESSEC
avec les témoignage de **Machin**
et de **machin**

Chaque «entretien», d'une durée de deux heures, est centré sur un sujet de technique financière. Il est l'occasion d'un échange entre un universitaire, spécialiste du thème, et des professionnels qui exposent leurs expériences d'utilisation concrète des modélisations les plus récentes.

D E M A N D E D ' I N F O R M A T I O N

Participation : 1 000 francs ttc

À retourner à La Revue Banque, Monique Souci

18 rue La Fayette, 75009 Paris - ☎ 01 48 00 54 04 ; fax 01 48 24 12 97

Société

Nom

Prénom

Fonction

Service

Adresse

.....

Téléphone

Fax

Le montant de votre participation peut être imputé sur vos dépenses de formation

continue, conformément à la circulaire n° 471 du 17 août 1989.

